数理解析研究所講究録 1405 巻 2004 年 197-213

The motion of an elastic closed curve with constant enclosed area

東北大学大学院理学研究科博士課程　　岡部 真也　(Shinya Okabe)
Mathematical Institute, Tohoku University

1 はじめに

平面内に弾性体でできた閉曲線があるとする. この閉曲線が囲む領域の内側とその外側が二種の非圧縮性粘性流体 F_i, F_o で満たされているとする. このとき, 次の問題について考察する:「非圧縮性の仮定により, 閉曲線が囲む領域の面積は一定になる. 一方, 閉曲線は曲げエネルギーを減少させるように変形していくことが期待されるわけだが, このように面積が一定であるという束縛条件下においても, そのような変形は可能であるのか? また, もし可能であるならば, 最終的にはどのような形となるのか? 」

このような閉曲線の運動は, 非伸縮かつ囲む面積が一定であるという二つの束縛条件に従う閉曲線の弾性エネルギーに対する勾配流方程式に支配される. 弾性エネルギーとは total squared curvature として知られるものであり,

$$E = \oint \kappa(s)^2\, ds \tag{E}$$

という形で定義される. ただし, κ は曲率, s は弧長パラメータを表す. この勾配流方程式は次のように表すことができる:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = -\dfrac{\partial^4 \gamma}{\partial x^4} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left(v - 2\left|\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}\right\} + \lambda \boldsymbol{n}, \\ -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left|\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right|^2 v = 2\left|\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right|^4 - \left|\dfrac{\partial^3 \gamma}{\partial x^3}\right|^2 - \lambda \boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}, \\ \displaystyle\int_0^L \left\{\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right) v - \left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right)^3 + \lambda\right\} dx = 0. \end{cases} \tag{EQ}$$

ただし, $v(x,t)$ および $\lambda(t)$ はスカラー函数である. そして, 主結果は次のように述べることができる:

定理 1.1. $|(\partial\gamma_0/\partial x)(x)| \equiv 1$ をみたす滑らかな初期閉曲線 $\gamma_0(x)$ を与える. また, その周長を L, 囲む面積を $\mathcal{A}_0$, 回転数を 1 とする. このとき, 方程式 (EQ) の一意的な古典解

$\gamma(x,t)$ がすべての $t>0$ に対して存在し, かつ, $\gamma(x,t)$ は $|(\partial\gamma/\partial x)(x,t)| \equiv 1$ をみたす. さらに, $t\to\infty$ のとき, $\gamma(x,t)$ は

$$
\text{(EE)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial^4\gamma}{\partial x^4} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\left(v - 2\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right\} + \lambda\boldsymbol{n} = 0, \\ -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2 v = 2\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^4 - \left|\dfrac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right|^2 - \lambda\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}, \\ \displaystyle\int_0^L \left\{\left(\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)v - \left(\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)^3 + \lambda\right\}dx = 0, \end{cases}
$$

の解 $\hat{\gamma}(x)$ に C^∞ 位相で収束する.

本稿では非伸縮かつ囲む面積が一定であるという二つの束縛条件に従う閉曲線の弾性エネルギーに対する勾配流のダイナミクスについて考察している. N. Koiso [1] は非伸縮であるという束縛条件に従う空間閉曲線の弾性エネルギー (E) に対する勾配流方程式について考察している. その中では, その勾配流方程式が一意かつ大域的な古典解をもち, さらにその解は elastica に収束することが示されている.

あらかじめ周長を与えられた曲線の弾性エネルギーに対する変分問題の解として, elastica が知られている. 閉曲線に対しては, Langer and Singer [2] によって閉 elastica が完全に分類され, さらにそれらの knot type も決定された. 一方, 周長かつ囲む面積が一定であるという束縛条件付きの弾性エネルギーに対する変分問題も考察されている. 例えば, K. Watanabe [6], [7] などがある. [6] においては,

$$
\frac{4L^2}{25\pi} \leq M \leq \frac{L^2}{4\pi}
$$

をみたす $L>0$ と M に対して, この変分問題の minimizer となる閉曲線 γ が存在し, γ は滑らかであり, かつ単純であること, さらにその対称軸の数は偶数個であることが示されている. ただし, L, M はそれぞれ γ の周長, 囲む面積を表している. [7] では, 十分小さな δ_0 に対して,

$$
0 < \frac{L^2}{4\pi} - M < \delta_0
$$

と仮定することにより [6] を改良している. さらに, Matsumoto-Murai-Yotsutani [3] はこの変分問題の解の構造について考察しており, 固定された $n \geq 2\,(n\in\mathbb{N})$ に対して, $n-$mode 解が一意であることを示している. ただし, $n-$mode 解とは n 個の対称軸をもつ解のことである. この変分問題における Euler-Lagrange 方程式は

$$
\text{(1.1)} \qquad \frac{d^2\kappa}{ds^2} + \frac{1}{2}\kappa^3 - \mu_1\kappa - \mu_2 = 0
$$

という形で与えられる. ただし, μ_1 と μ_2 は Lagrange 乗数である. 方程式 (EE) が (1.1) と一致することを第2節で述べる.

第2節では, 勾配流方程式 (EQ) を導出する. 以下, 定理の証明を, 第3節では時間局所解の存在, 第4節では時間大域解の存在, そして最後に第5節において定常解への収束, という順で述べていく.

2 勾配流方程式の導出

初期閉曲線 γ_0 は滑らかであり, その周長は L, 囲む面積は $\mathcal{A}_0$ であるとする. また γ_0 は弧長パラメータ $x \in S^1_L := \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ によって表示されるものとする. つまり, $|(\partial\gamma_0/\partial x)(x)| \equiv 1$ をみたすとする. 初期状態において $\gamma_0(x)$ にあった点が時刻 $t>0$ においては $\gamma(x,t)$ に移動しているものとする. つまり, $\gamma(x,0)=\gamma_0(x)$ が成り立つとする. さらに, $\gamma(x,t)$ は次の二つの束縛条件をみたす:

(C1) 閉曲線は非伸縮である;
(C2) 閉曲線が囲む面積は一定である.

まず, 非伸縮性を表す束縛条件 (C1) を次のように与える:

$$\left|\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t)\right| \equiv 1. \tag{2.1}$$

このとき, パラメータ x は γ の弧長パラメータとなるから, $\gamma(x,t)$ の周長は L となる. このとき, 弾性エネルギー (E) は

$$E(\gamma(x,t)) = \int_0^L \left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}(x,t)\right|^2 dx \tag{2.2}$$

と表される. さらに, 囲む面積が一定であるという束縛条件は

$$\mathcal{A}(\gamma(x,t)) = -\frac{1}{2}\int_0^L \boldsymbol{n}(x,t)\cdot\gamma(x,t)\,dx \equiv \mathcal{A}_0 \tag{2.3}$$

で与えることができる. ただし, $\boldsymbol{n}(x,t)$ は $\gamma(x,t)$ の内向き単位法線ベクトルであり, $\boldsymbol{n} = -R(\partial\gamma/\partial x)$ とかける. ただし, $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ である. この二つの束縛条件 (2.1), (2.3) に従う閉曲線の弾性エネルギー (2.2) に対する勾配流方程式を考える.

$$\frac{d}{dt}E(\gamma(x,t)) = 2\int_0^L \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}(x,t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)\,dx = 2\int_0^L \frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}(x,t)\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)\,dx$$

より, $\partial\gamma/\partial t = -(\partial^4\gamma/\partial x^4)$ が弾性エネルギーが最も効率よく減少する "方向" であることがわかる. しかし, この "方向" に変形した場合には二つの束縛条件はみたされない. よって, 各時刻 t において二つの束縛条件がみたされるように "方向" を修正する. (2.1) より, $(\partial\gamma/\partial x)\cdot(\partial^2\gamma/\partial x\partial t) = 0$ である. ここで,

$$V = \left\{ \eta(x,t) \;\middle|\; \frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0 \right\}$$

とおく．また，囲む面積が一定であることから，$\langle \partial\gamma/\partial t, \boldsymbol{n}\rangle_{L^2} = 0$ が従う．ただし，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ は x に関する L^2 内積である．ここで，

$$W = \{\eta(x,t) \mid \langle \eta, \boldsymbol{n}\rangle_{L^2} = 0\}$$

とおく．二つの束縛条件 (C1), (C2) がみたされるためには，$\partial\gamma/\partial t \in V \cap W$ となればよい．ここで，V と W の L^2 内積に関する直交補空間はそれぞれ

$$\begin{aligned} V^\perp &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\xi(x,t)\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t)\right) \;\middle|\; \xi(x,t)\text{ はスカラー函数} \right\}, \\ W^\perp &= \{\lambda(t)\,\boldsymbol{n}(x,t) \mid \lambda(t)\text{ はスカラー函数}\}, \end{aligned}$$

と表される．$(V\cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$ であるから，あるスカラー函数 $\xi(x,t)$ と $\lambda(t)$ が存在して

$$-\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\xi\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \lambda\boldsymbol{n} \in V\cap W$$

とすることができる．従って，求める勾配流方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\gamma}{\partial t} = -\dfrac{\partial^4\gamma}{\partial x^4} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\xi\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \lambda\boldsymbol{n}, \\ \left\{-\dfrac{\partial^5\gamma}{\partial x^5} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\xi\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \lambda\dfrac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial x}\right\}\cdot\dfrac{\partial\gamma}{\partial x} = 0, \\ \displaystyle\int_0^L \left\{-\dfrac{\partial^4\gamma}{\partial x^4} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\xi\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \lambda\boldsymbol{n}\right\}\cdot\boldsymbol{n}\,dx = 0, \\ \left|\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\right| \equiv 1, \end{cases}$$

とかくことができる．ただし，第二式は $\partial\gamma/\partial t \in V$ を表す方程式であり，第三式は $\partial\gamma/\partial t \in W$ を表す方程式である．ここで，$(\partial\gamma/\partial x)\cdot(\partial^2\gamma/\partial x^2) = 0$ から従う関係式および $v = \xi + 2\,|\partial^2\gamma/\partial x^2|^2$ なる変換を用いることにより第二式は

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2 v = 2\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^4 - \left|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right|^2 - \lambda\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}$$

と書き換えることができる．第三式は $\partial^2\gamma/\partial x^2 = \kappa\boldsymbol{n}$, $\partial\boldsymbol{n}/\partial x = -\kappa(\partial\gamma/\partial x)$ により

$$\int_0^L \left\{\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)v - \left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)^3 + \lambda\right\}dx = 0$$

となる．このようにして二つの束縛条件に従う閉曲線の弾性エネルギーに対する勾配流方程式 (EQ) を導出することができる．

注意 2.1. $(\partial\gamma/\partial x)\cdot(\partial^2\gamma/\partial x\partial t)=0$ は非伸縮性を表す束縛条件 (2.1) の必要条件であるから, (EQ) の第二式も (2.1) の必要条件にすぎない. ゆえに, 方程式系 (EQ) の解が (2.1) をみたすことは確かめる必要がある.

最後に (EE) は (1.1) と同値であることを述べておく. (EE) の第一式から,

$$
\begin{aligned}
0&=\left\{-\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(v-2\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right\}+\lambda\boldsymbol{n}\right\}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial x}\\
&=\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(v-2\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right).
\end{aligned}
$$

このとき, (EE) の第一式は次のようになる:

$$
-\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(C-\frac{3}{2}\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+\lambda\boldsymbol{n}=0.
$$

ただし, C はある定数である. 従って,

$$
\begin{aligned}
0&=\left\{-\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(C-\frac{3}{2}\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+\lambda\boldsymbol{n}\right\}\cdot\boldsymbol{n}\\
&=-\frac{d^2\kappa}{dx^2}-\frac{1}{2}\kappa^3+C\kappa+\lambda.
\end{aligned}
$$

この方程式は (1.1) と一致する.

3 時間局所解の存在

まず始めに, v や λ に関する評価を与えるときに有用な補題を述べておく.

補題 3.1 (Koiso [1]). $a(x),f(x)\in C(S^1_L)$ とし, $a\geq 0$, $\|a\|_{L^1}>0$ をみたすとする. このとき, $-(d^2v/dx^2)+av=f$ は一意解をもつ. さらに, 解 v は

$$
\max_{x\in S^1_L}|v|\leq\left(2L+\|a\|_{L^1}^{-1}\right)\|f\|_{L^1}\,, \tag{3.1}
$$

$$
\max_{x\in S^1_L}\left|\frac{dv}{dx}\right|\leq 2\left(1+L\|a\|_{L^1}\right)\|f\|_{L^1}\,, \tag{3.2}
$$

をみたす.

この節では (EQ) がある時間区間 $[0,T_m)$ において古典解をもつことを示す. 議論を始める前に $v(x,t)$ と $\lambda(t)$ が各時刻 $t>0$ において (EQ) の第二式と第三式によって決定されることを述べておく.

補題 3.2. $\gamma(x,t)$ は $|(\partial\gamma/\partial x)(x,t)| \equiv 1$ をみたすとする．このとき，方程式系

$$(3.3)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left|\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right|^2 v = 2\left|\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right|^4 - \left|\dfrac{\partial^3 \gamma}{\partial x^3}\right|^2 - \lambda \boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}, \\ \displaystyle\int_0^L \left\{\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)v - \left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)^3 + \lambda\right\} dx = 0, \end{cases}$$

は各時刻 $t>0$ に対して解 $(v(x,t),\lambda(t))$ をもつ．もし $\gamma(x,t)$ が円でなければ，$(v(x,t),\lambda(t))$ は一意であり，

$$(3.4)\qquad v = u + \lambda w, \qquad \lambda = \frac{\displaystyle\int_0^L \left(-\kappa u + \kappa^3\right) dx}{L + \displaystyle\int_0^L \kappa w\, dx}$$

で与えられる．ただし，u, w はそれぞれ

$$(3.5)\qquad -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa^2 u = \kappa^4 - \left(\frac{\partial \kappa}{\partial x}\right)^2, \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa^2 w = -\kappa,$$

の解である．一方，もし $\gamma(x,t)$ が半径 r の円ならば，解の集合は

$$\left\{(v,\lambda)\ \middle|\ v = \frac{1}{r^2} - \lambda r,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

で表される．

以下，$C([0,T) : (W^{4,p}(S^1_L))^2 \times H^2(S^1_L) \times \mathbb{R})$ における逐次近似法および縮小写像の原理を用いて (EQ) の mild solution を構成する．そのために，(EQ) を次のように書き換える．まず，$A = (\partial^4/\partial x^4) + 1$ とおく．また，その定義域 $\mathcal{D}(A)$ を $\mathcal{D}(A) = W^{4,p}(S^1_L)$ とする．ただし，$W^{4,p}(S^1_L)$ は S^1_L 上の Sobolev 空間であり，$p \geq 3$ としている．この作用素 A は $L^p(S^1_L)$ 上の閉作用素であり，$-A$ は解析的半群 e^{-tA} を生成する．ここで，$\gamma = (\varphi, \psi)$ とおくと (EQ) は次のようにかける:

$$(\mathrm{EQA})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = -A\varphi + f(\varphi,\psi,v,\lambda), \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -A\psi + g(\varphi,\psi,v,\lambda), \\ -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left|\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right|^2 v = 2\left|\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}\right|^4 - \left|\dfrac{\partial^3 \gamma}{\partial x^3}\right|^2 - \lambda \boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}, \\ L\lambda = -\displaystyle\int_0^L \left\{\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)v - \left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)^3\right\} dx. \end{cases}$$

ただし, f と g は

$$f(\varphi,\psi,v,\lambda)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(v-2\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\}-\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x}+\varphi,$$
$$g(\varphi,\psi,v,\lambda)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(v-2\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\psi,$$

によって与えられる. $\frac{3}{4}+\frac{1}{4p}<\alpha<\frac{7}{8}$ なる α に対して, 分数冪 A^α とその定義域 $X^\alpha=\mathcal{D}(A^\alpha)$ を考える. A の定義から, X^α におけるノルムを $\|u\|_{(\alpha)}:=\|A^\alpha u\|_{L^p}$ と定義できる. また $\frac{3}{4}<\alpha$ であるから, $X^\alpha\subset W^{3,p}(S^1_L)$ が成り立つ. つまり, ある定数 C_α が存在して $\|\cdot\|_{W^{3,p}}\le C_\alpha\|\cdot\|_{(\alpha)}$ が成り立つ.

ここで $\gamma_0=(\varphi_0,\psi_0)$ は円でないとし, $\varphi_0,\psi_0\in\mathcal{D}(A)$ とする. このとき補題 3.2 より, v_0 と λ_0 を

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left|\dfrac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2}\right|^2 v=2\left|\dfrac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2}\right|^4-\left|\dfrac{\partial^3\gamma_0}{\partial x^3}\right|^2-\lambda\boldsymbol{n}_0\cdot\dfrac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2}, \\ L\lambda=-\displaystyle\int_0^L\left\{\left(\boldsymbol{n}_0\cdot\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2}\right)v-\left(\boldsymbol{n}_0\cdot\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2}\right)^3\right\}dx, \end{cases}$$

の解として定義できる. さらに γ_0 の仮定から, ある正定数 δ_0 が存在して

$$L+\int_0^L\left(\boldsymbol{n}_0\cdot\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2}\right)w_0\,dx\ge\delta_0$$

が成り立つ. ただし, w_0 は

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left|\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2}\right|^2 w=-\boldsymbol{n}_0\cdot\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2}$$

の解である. 逐次近似法および縮小写像の原理によって (EQA) の mild solution を構成するために, γ_j, v_j, λ_j を次のように帰納的に定義したい:

$$\text{(SA)}\qquad\begin{cases} \varphi_{j+1}=e^{-tA}\varphi_0+\displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)A}f(\varphi_j(s),\psi_j(s),v_j(s),\lambda_j(s))\,ds, \\ \psi_{j+1}=e^{-tA}\psi_0+\displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)A}g(\varphi_j(s),\psi_j(s),v_j(s),\lambda_j(s))\,ds, \\ \text{ただし, } v_j \text{ と } \lambda_j \text{ は次の方程式系の解である:} \\ -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left|\dfrac{\partial^2\gamma_j}{\partial x^2}\right|^2 v=2\left|\dfrac{\partial^2\gamma_j}{\partial x^2}\right|^4-\left|\dfrac{\partial^3\gamma_j}{\partial x^3}\right|^2-\lambda\boldsymbol{n}_j\cdot\dfrac{\partial^2\gamma_j}{\partial x^2}, \\ L\lambda=-\displaystyle\int_0^L\left\{\left(\boldsymbol{n}_j\cdot\frac{\partial^2\gamma_j}{\partial x^2}\right)v-\left(\boldsymbol{n}_j\cdot\frac{\partial^2\gamma_j}{\partial x^2}\right)^3\right\}dx. \end{cases}$$

そのために, 幾つか補題を準備する.

補題 3.3. $\varepsilon > 0$ を $\|\partial^2\gamma_0/\partial x^2\|_{L^2} - 2L^{(p-2)/2p}C_\alpha\varepsilon > 0$ をみたすようにとる．この ε に対して，$\|\varphi_j - \varphi_0\|_{(\alpha)}$, $\|\psi_j - \psi_0\|_{(\alpha)} \leq \varepsilon$ と仮定する．このとき，正定数 K_1 が存在して

$$\left|\int_0^L \boldsymbol{n}_j \cdot \frac{\partial^2\gamma_j}{\partial x^2} w_j\,dx - \int_0^L \boldsymbol{n}_0 \cdot \frac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2} w_0\,dx\right| \leq K_1\varepsilon \tag{3.6}$$

が成り立つ．ただし，定数 K_1 は $\|\varphi_0\|_{(\alpha)}$, $\|\psi_0\|_{(\alpha)}$, ε のみに依存する．

もしλ_j の分母が 0 となってしまうと，帰納的に γ_j, v_j, λ_j を定義することはできない．ここで

$$\varepsilon_* := \min\left\{\varepsilon_1,\, \varepsilon_2 > 0 \;\middle|\; \left\|\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2}\right\|_{L^2} - 2L^{(p-2)/2p}C_\alpha\varepsilon_1 > 0,\, \delta_0 - K_1\varepsilon_2 > \frac{\delta_0}{2}\right\}$$

とおく．このとき補題 3.3 より，$\|\varphi_j - \varphi_0\|_{(\alpha)}$, $\|\psi_j - \psi_0\|_{(\alpha)} \leq \varepsilon_*$ であれば

$$\left|L + \int_0^L \boldsymbol{n}_j \cdot \frac{\partial^2\gamma_j}{\partial x^2} w_j\,dx\right| \geq \left|L + \int_0^L \boldsymbol{n}_0 \cdot \frac{\partial^2\gamma_0}{\partial x^2} w_0\,dx\right| - K_1\varepsilon_* \geq \delta_0 - K_1\varepsilon_* \geq \frac{\delta_0}{2}$$

が成り立つことがわかる．従って，このような ε_* に対して γ_j, v_j, λ_j を定義していけばよい．

補題 3.4. $\|\varphi_j - \varphi_0\|_{(\alpha)}$, $\|\psi_j - \psi_0\|_{(\alpha)} \leq \varepsilon_*$ と仮定する．このとき $\|\varphi_0\|_{(\alpha)}$, $\|\psi_0\|_{(\alpha)}$, ε_* のみに依存する正定数 K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 が存在して

$$|\lambda_j(t) - \lambda_0| \leq K_2\varepsilon_*, \tag{3.7}$$

$$\sup_{x\in S^1_L} |v_j(x,t) - v_0(x)| \leq K_3\varepsilon_*, \tag{3.8}$$

$$\sup_{x\in S^1_L} \left|\frac{\partial v_j}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial v_0}{\partial x}(x)\right| \leq K_4\varepsilon_*, \tag{3.9}$$

$$\|f(\varphi_j, \psi_j, v_j, \lambda_j) - f(\varphi_0, \psi_0, v_0, \lambda_0)\|_{L^p} \leq K_5\varepsilon_*, \tag{3.10}$$

$$\|g(\varphi_j, \psi_j, v_j, \lambda_j) - g(\varphi_0, \psi_0, v_0, \lambda_0)\|_{L^p} \leq K_6\varepsilon_*, \tag{3.11}$$

が成り立つ．

ここで

$$B := \max\left\{\|f(\varphi_0, \psi_0, v_0, \lambda_0)\|_{L^p},\, \|g(\varphi_0, \psi_0, v_0, \lambda_0)\|_{L^p}\right\}, \quad M := \max\{K_5, K_6\},$$

とおく．

補題 3.5.

$$\begin{cases} \left\|e^{-tA}\varphi_0 - \varphi_0\right\|_{(\alpha)},\, \left\|e^{-tA}\psi_0 - \psi_0\right\|_{(\alpha)} \leq \dfrac{\varepsilon_*}{2} \quad (0 \leq t \leq T), \\ \dfrac{C_\alpha}{1-\alpha}\left(M\varepsilon_* + B\right) T^{1-\alpha} \leq \dfrac{\varepsilon_*}{2}, \end{cases} \tag{3.12}$$

をみたすような $T>0$ をとる．このとき，$\varphi_j, \psi_j, v_j, \lambda_j$ は (SA) により帰納的に定義される．さらに，すべての正整数 j に対して $\varphi_j, \psi_j \in C([0,T]:X^\alpha)$ であり，

$$\|\varphi_j - \varphi_0\|_{(\alpha)}, \|\psi_j - \psi_0\|_{(\alpha)} \le \varepsilon_*$$

が成り立つ．

ここで

$$F(\varphi_j, \psi_j) = e^{-tA}\varphi_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(\varphi_j(s), \psi_j(s), v_j(s), \lambda_j(s))\, ds,$$
$$G(\varphi_j, \psi_j) = e^{-tA}\psi_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} g(\varphi_j(s), \psi_j(s), v_j(s), \lambda_j(s))\, ds,$$

とおく．さらに

$$S_{\varepsilon_*,\varphi} = \left\{\varphi \in C([0,T]:X^\alpha) \;\middle|\; \|\varphi - \varphi_0\|_{(\alpha)} \le \varepsilon_*\right\},$$
$$S_{\varepsilon_*,\psi} = \left\{\psi \in C([0,T]:X^\alpha) \;\middle|\; \|\psi - \psi_0\|_{(\alpha)} \le \varepsilon_*\right\},$$

とする．$S_{\varepsilon_*,\varphi}$ と $S_{\varepsilon_*,\psi}$ にノルムを $\|u\|_T := \sup_t \|u(t)\|_{(\alpha)}$ と定義すると，$(S_{\varepsilon_*,\varphi}, \|\cdot\|_T)$ と $(S_{\varepsilon_*,\psi}, \|\cdot\|_T)$ はそれぞれ Banach 空間となる．写像 $\mathcal{F}: S_{\varepsilon_*,\varphi} \times S_{\varepsilon_*,\psi} \to S_{\varepsilon_*,\varphi} \times S_{\varepsilon_*,\psi}$ を

$$\mathcal{F}(\varphi_j, \psi_j) = (F(\varphi_j, \psi_j), G(\varphi_j, \psi_j))$$

によって定義する．ここで補題 3.3, 補題 3.4 と同様にして任意の i と j に対して，i と j によらない正定数 L_1 と L_2 が存在して

$$\|f(\varphi_i, \psi_i, v_i, \lambda_i) - f(\varphi_j, \psi_j, v_j, \lambda_j)\|_{L^p} \le L_1\left(\|\varphi_i - \varphi_j\|_{(\alpha)} + \|\psi_i - \psi_j\|_{(\alpha)}\right), \tag{3.13}$$
$$\|g(\varphi_i, \psi_i, v_i, \lambda_i) - g(\varphi_j, \psi_j, v_j, \lambda_j)\|_{L^p} \le L_2\left(\|\varphi_i - \varphi_j\|_{(\alpha)} + \|\psi_i - \psi_j\|_{(\alpha)}\right), \tag{3.14}$$

が成り立つことを確かめられるので，次の補題が得られる．

補題 3.6. (3.12) と $\frac{C_\alpha}{1-\alpha}T^{1-\alpha}(L_1+L_2)<1$ をみたす $T>0$ に対して，$\mathcal{F}$ は $S_{\varepsilon_*,\varphi} \times S_{\varepsilon_*,\psi}$ からそれ自身への縮小写像となる．

あとは縮小写像の原理を用いることにより (EQA) の mild solution を構成することができる．次にこの mild solution が (EQ) の古典解となることを証明する．そのために，まず $f(\varphi,\psi,v,\lambda)$ と $g(\varphi,\psi,v,\lambda)$ が $(0,T)$ から $L^p(S^1_L)$ への局所 Hölder 連続函数であることを示す．これは，φ と ψ が $(0,T)$ から $L^p(S^1_L)$ への局所 Hölder 連続函数であることから確かめることができる．f と g の局所 Hölder 連続性を用いることにより，φ, $\psi \in C([0,T]:X^\alpha) \cap C^1([0,T]:L^p)$ であること，さらに，(EQA) をみたすということを証明することができる．あとは標準的な議論によって，φ と ψ が (EQ) の古典解となることを示していくことができる．

注意 3.1. 上の議論により, $\gamma(x,t)$ が t に関して連続的微分可能であることが示されるが, それにともなって $v(x,t), \lambda(t)$ も共に t に関して連続的微分可能であることが従う.

注意 2.1 でも述べたように, (EQ) の第二式は非伸縮性を表す束縛条件 (2.1) の必要条件にすぎないので, 解 γ が条件 (2.1) をみたすことを確かめる. ここまでは, 初期閉曲線が円でないと仮定してきたが, 次の補題は $|\partial\gamma_0/\partial x| \equiv 1$ をみたす任意の初期閉曲線に対して成り立つ.

補題 3.7. $|(\partial\gamma_0/\partial x)(x)| \equiv 1$ をみたす滑らかな初期閉曲線 $\gamma_0(x)$ を与える. このとき, (EQ) の解 $\gamma(x,t)$ は $|(\partial\gamma/\partial x)(x,t)| \equiv 1$ をみたす.

証明は [1] における証明と同様にして従う. 以上の議論により, 初期閉曲線が円でない場合については時間局所的に (EQ) の古典解が存在することが示された. この節の最後に初期閉曲線が円である場合を述べておく.

補題 3.8. $\gamma_0(x) = \vec{a} + r\left(\cos\frac{x}{r}, \sin\frac{x}{r}\right)$ を初期閉曲線として与える. ただし, $\vec{a}$ は定数ベクトルであり, r は正定数である. このとき, 方程式系 (EQ) は解 $(\gamma(x,t), v(x,t), \lambda(t)) = \left(\gamma_0(x), \frac{1}{r^2} - \lambda_0(t)r, \lambda_0(t)\right)$ をもつ. ただし, $\lambda_0(t)$ は任意の連続函数である.

4 時間大域解の存在

補題 3.8 より, もし $\gamma_0(x)$ が円ならば $\gamma(x,t) \equiv \gamma_0(x)$ が (EQ) の, $\lambda(t)$ の任意性を除いて, 一意な解となる. 以下,

$$|\mathcal{A}_0| < \frac{L^2}{4\pi}$$

と仮定する. ただし, $L^2/4\pi$ は周長が L である円の囲む面積である. さらに, $\gamma_0(x)$ の回転数は 1 であるとする. このとき, 等周不等式により $\gamma_0(x)$ は円ではない. 以下, $\gamma(x,t)$ を上の仮定をみたす初期閉曲線に対する (EQ) の $[0, T_m)$ 上の解とする.

(EQ) の第一式の性質により, 解 $\gamma(x,t)$ の重心および回転数は不変であることがわかる. よって, 以下, $\gamma(x,t)$ の重心は原点であり, 回転数は 1 であるとして議論をすすめる. まずは, 弾性エネルギーに対する評価について述べておく.

補題 4.1. $\|\kappa\|_{L^2}$ は非増加である. さらに,

$$\|\kappa\|_{L^2}^2 \geq \frac{4\pi^2}{L} \tag{4.1}$$

が成り立つ. ただし等号の成立は $\kappa \equiv 2\pi/L$ *a.e.* である場合に限る.

証明には方程式系 (EQ) の第一式および歪みエネルギー $\int_0^L \left(\kappa - \frac{2\pi}{L}\right)^2 dx$ を用いる. この補題により, $\|\kappa\|_{L^2}$ つまり $\|\partial^2\gamma/\partial x^2\|_{L^2}$ は有界であり, かつ 0 から離れていることが従う. もし $\gamma(x,t)$ が円でなければ, 補題 3.2 より $\lambda(t)$ は (3.4) で与えられる. $\lambda(t)$ の評価を導くために次の補題を準備する.

補題 4.2.

$$\inf_{t\in[0,T_m)} L + \int_0^L \kappa w\, dx > 0.$$

証明の概略. 証明は背理法による. その手順は以下のようである. (証明の詳細は [4].)
第一段. まず, 結論を否定する. このとき,

$$L + \int_0^L \kappa_j w_j\, dx \longrightarrow 0 \quad (j \longrightarrow \infty)$$

となるような $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [0, T_m)$ が存在する. ただし, $\kappa_j := \kappa(\cdot, t_j), w_j := w(\cdot, t_j)$ とした.

第二段. Ascoli-Arzelá の定理を用いて, ある $\{w_{j_n}\} \subset \{w_j\}$ が存在して $n \to \infty$ とするとき w_{j_n} が w_∞ に一様収束することを示す. さらに, このとき, この極限函数 w_∞ が定数函数であることも従う.

第三段. 補題 4.1 によって, κ_j は $L^2(S^1_L)$ で有界であるから, 弱極限 κ_∞ をもつことがわかる. この事実と γ_j の回転数が 1 であることから,

$$w_\infty = -\frac{L}{2\pi}$$

となることを示す.

第四段. w_j が $-(d^2 w_j/dx^2) + {\kappa_j}^2 w_j = -\kappa_j$ をみたすこと, および, 第三段で求めた w_∞ の値を用いて

$$\int_0^L {\kappa_j}^2\, dx \longrightarrow \frac{4\pi^2}{L}$$

となることを示す.

第五段. 補題 4.1 および 第四段で示した事実から,

$$\kappa_\infty \equiv \frac{2\pi}{L} \ \ a.e.$$

となることを示す.

第六段. 最後に γ_j が κ_∞ を曲率とする曲線, つまり, 円に C^1 位相で収束することを示す. これは γ_j の面積が増加することを意味しているので, これより結論が得られる.

□

この補題と補題 3.1 により, 次のように λ, v の評価を与えることができる.

補題 4.3. 正定数 C が存在して

$$|\lambda|, \ \sup_{x\in S^1_L} |v|, \ \sup_{x\in S^1_L} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \le C \left(1 + \left\|\frac{\partial^3 \gamma}{\partial x^3}\right\|^2_{L^2}\right) \tag{4.2}$$

が成り立つ.

大域解の存在を示すために, まず, 次の補題からはじめる.

補題 4.4. $\gamma(x,t)$ を (EQ) の $[0,T)$ 上の古典解とする. $\|\partial^3\gamma/\partial x^3\|_{L^2} \le C_1$ であると仮定する. このとき, 任意の整数 $n > 3$ に対して $\|\partial^n\gamma/\partial x^n\|_{L^2} \le C_2$ が成り立つ. ただし, C_2 は C_1, γ_0, T のみに依存する定数である.

この証明は帰納法による. 補題 4.3 と補題 4.4 からもわかるように, 大域解の存在を証明するためには $\|\partial^3\gamma/\partial x^3\|_{L^2}$ の任意有限時間での有界性を示せばよい. そのために, 次の補題を準備する.

補題 4.5. $\gamma(x,t)$ を (EQ) の $[0,T)$ 上の解とする. このとき, 正定数 C_1 と C_2 が存在して

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right\|_{L^2}^2 \le -C_1\left\|\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}\right\|_{L^2}^2 + C_2 \tag{4.3}$$

が成り立つ. ただし, C_1 と C_2 は γ_0 と T のみに依存する定数である.

証明はエネルギー法を用いて行う. ただし, λ や v に対する評価を与える際には, 曲線の幾何的性質を利用している. 以上の準備により, 次を証明することができる.

定理 4.1. $|(\partial\gamma_0/\partial x)(x)| \equiv 1$ をみたす滑らかな初期閉曲線 $\gamma_0(x)$ を与える. また, その周長を L, 囲む面積を $\mathcal{A}_0$, 回転数を 1 とする. さらに $|\mathcal{A}_0| < L^2/4\pi$ と仮定する. このとき, (EQ) はすべての時刻 $t > 0$ に対して一意な古典解 $\gamma(x,t)$ をもつ. さらに 解 $\gamma(x,t)$ は $|(\partial\gamma/\partial x)(x,t)| \equiv 1$ をみたす.

証明. 補題 3.7 により, 解 $\gamma(x,t)$ が $|\partial\gamma/\partial x| \equiv 1$ をみたすことは示されている. 大域解の存在を証明するには補題 4.4 より, $\|\partial^3\gamma/\partial x^3\|_{L^2}$ の任意有限時間での有界性を示せばよい.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right\|_{L^2}^2 &= 2\left\langle \frac{\partial^5\gamma}{\partial x^5}, -\frac{\partial^5\gamma}{\partial x^5} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\left(v - 2\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \lambda\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x}\right\rangle_{L^2} \\ &\le -\left\|\frac{\partial^5\gamma}{\partial x^5}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\left(v - 2\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + \lambda\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x}\right\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{4.4}$$

以下, (4.4) の右辺を補題 4.1, 補題 4.3 などを用いて評価していく. このとき

$$\left\|\lambda\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x}\right\|_{L^2} \le C\left(1 + \left\|\frac{\partial^5\gamma}{\partial x^5}\right\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\left(v - 2\left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\right)\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\right\|_{L^2} \le C\left(1 + \left\|\frac{\partial^5\gamma}{\partial x^5}\right\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + \left\|\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}\right\|_{L^2}\left\|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right\|_{L^2}\right),$$

という評価が得られる. ただし, $\|\partial^4\gamma/\partial x^4\|_{L^2}\|\partial^3\gamma/\partial x^3\|_{L^2}$ は $\|v(\partial^3\gamma/\partial x^3)\|_{L^2}$ を評価するものとして得られる. 従って,

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right\|_{L^2}^2 \leq -\left\|\frac{\partial^5\gamma}{\partial x^5}\right\|_{L^2}^2 + C\left(1+\left\|\frac{\partial^5\gamma}{\partial x^5}\right\|_{L^2}^{\frac{11}{6}} + \left\|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right\|_{L^2}^2\left\|\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}\right\|_{L^2}^2\right)$$
$$\leq \left(-1+\frac{11}{12}\varepsilon^{\frac{12}{11}}\right)\left\|\frac{\partial^5\gamma}{\partial x^5}\right\|_{L^2}^2 + C\left(1+\frac{\varepsilon^{-12}}{12} + \left\|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right\|_{L^2}^2\left\|\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}\right\|_{L^2}^2\right)$$

と評価できる. ここで, $-1+\frac{11}{12}\varepsilon^{12/11}<0$ となるように ε を十分小さくとれば,

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right\|_{L^2}^2 \leq C\left(1+\left\|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right\|_{L^2}^2\left\|\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}\right\|_{L^2}^2\right) \tag{4.5}$$

を得る. 補題 4.1 より $\|\partial^3\gamma/\partial x^3\|_{L^2} > C > 0$ であることがわかるので, (4.5) の両辺を $\|\partial^3\gamma/\partial x^3\|_{L^2}^2$ で割れば,

$$\frac{d}{dt}\log\left\|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right\|_{L^2}^2 \leq C\left(1+\left\|\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}\right\|_{L^2}^2\right) \tag{4.6}$$

となる. ここで補題 4.5 において,

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right\|_{L^2}^2 \leq -C_1\left\|\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}\right\|_{L^2}^2 + C_2 \tag{4.7}$$

が成り立つことが示されている. (4.6) と (4.7) を組み合わせれば

$$C_1\frac{d}{dt}\log\left\|\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right\|_{L^2}^2 + C\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right\|_{L^2}^2 \leq C_3$$

が得られる. この評価式と補題 4.1 により, 結論が得られる. □

5 定常解への収束

補題 4.5 の証明において, $\|\partial^4\gamma/\partial x^4\|_{L^2} \leq C_1\|\partial\gamma/\partial t\|_{L^2}+C_2$ となることが示される. この評価を用いると次の補題が得られる.

補題 5.1. ある定数 C_1, C_2 が存在して

$$|\lambda|,\ \sup_{x\in S^1_L}|v|,\ \sup_{x\in S^1_L}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \leq C_1\left(1+\left\|\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\|_{L^2}\right), \tag{5.1}$$

$$\sup_{x\in S^1_L}\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| \leq C_2\left(1+\left\|\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\right), \tag{5.2}$$

が成り立つ. ただし, C_1 と C_2 は t によらない定数である.

さらに, この補題をもとにして帰納的に次の補題を証明することができる.

補題 5.2. 任意の非負整数 n に対して, 正定数 C, N が存在して

$$\|\gamma\|_{H^{n+4}}\,,\ \|v\|_{H^{n+3}} \le C\left(1+\left\|\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\|_{H^n}^N\right)$$

が成り立つ. ただし, C と N は t によらない定数である.

以下の議論において, $\partial v/\partial t$ と $\partial\lambda/\partial t$ に関する評価が必要となる. そのために,

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2 v = 2\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^4-\left|\dfrac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right|^2-\lambda\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}, \\ \displaystyle\int_0^L\left\{\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)v-\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)^3+\lambda\right\}dx=0, \end{cases}$$

をそれぞれ t に関して微分すると,

$$\text{(E1)}\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial t}+\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\dfrac{\partial v}{\partial t} = -2\left(\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\right)v+8\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\left(\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\right) \\ \qquad -2\dfrac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\cdot\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}-\lambda\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)-\dfrac{\partial\lambda}{\partial t}\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}, \\ \displaystyle\int_0^L\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)\left(v-3\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)^2\right)+\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right\}dx=0, \end{cases}$$

となる. ここで, $\partial u/\partial t$ と $\partial w/\partial t$ をそれぞれ次の方程式の解とする:

(E2)

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\dfrac{\partial u}{\partial t} = -2\left(\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\right)u+8\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\left(\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\right) \\ \qquad -2\dfrac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\cdot\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}, \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial w}{\partial t}+\left|\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right|^2\dfrac{\partial w}{\partial t} = -2\left(\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\right)w-\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}+\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}\right). \end{cases}$$

よって $\partial v/\partial t$ を $\partial v/\partial t=(\partial u/\partial t)+\lambda(\partial w/\partial t)+(\partial\lambda/\partial t)w$ と分解することができる. $v=u+\lambda w$ と $\partial v/\partial t=(\partial u/\partial t)+\lambda(\partial w/\partial t)+(\partial\lambda/\partial t)w$ を (E1) の第二式に代入すると,

$$\text{(5.3)}\quad \frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\displaystyle\int_0^L\left\{-\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{n}\cdot\tfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)\left(u+\lambda w-3\left(\boldsymbol{n}\cdot\tfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)^2\right)-\left(\boldsymbol{n}\cdot\tfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)\left(\tfrac{\partial u}{\partial t}+\lambda\tfrac{\partial w}{\partial t}\right)\right\}dx}{L+\displaystyle\int_0^L\left(\boldsymbol{n}\cdot\tfrac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)w\,dx}$$

が得られる. これより, 次のように $\partial v/\partial t$ と $\partial\lambda/\partial t$ に関する評価を与えることができる:

補題 5.3. 任意の整数 $n \geq 0$ に対して,

$$\left|\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right|,\ \sup_{x\in S^1_L}\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|,\ \sup_{x\in S^1_L}\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}\right| \leq C\left(1+\left\|\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\|_{L^2}\right)\left\|\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\|_{H^3}, \tag{5.4}$$

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{H^{n+2}} \leq C\left(1+\left\|\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\|^N_{H^n}\right)\left\|\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\|_{H^{n+3}}, \tag{5.5}$$

が成り立つ. ただし, C と N は t によらない定数である.

以上の補題を用いると, 定常解への収束を示すための鍵となる次の補題を示すことができる.

補題 5.4. 任意の整数 $n \geq 0$ に対して

$$\int_0^L \left\|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\|^2_{L^2} dt < \infty$$

が成り立つ. さらに,

$$\left\|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\|_{L^2} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty)$$

が成り立つ.

さらに, 定常解への収束を示す際に重要な役割を果たす次の命題を述べておく.

命題 5.1 (L.Simon [5]). $\hat{\gamma}(x)$ を (EE) の解とする. このとき, ある定数 $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ と $\hat{\gamma}$ の $C^{4+4\alpha}_x$ 近傍 U が存在して, 任意の $\gamma \in U$ に対して

$$\left\|\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right\|_{L^2} \geq |E(\gamma) - E(\hat{\gamma})|^{1-\theta}$$

が成り立つ.

最後に次の定理の証明を述べる.

定理 5.1. (EQ) の解 $\gamma(x,t)$ は (EE) の解 $\hat{\gamma}(x)$ に C^∞ 位相で収束する.

証明. 補題 5.2 と補題 5.4 より, $\|\gamma\|_{H^{n+4}} \leq C$ である. よって, Ascoli-Arzelá の定理より, ある $\{t_j\}_{j=1}^{j=\infty} \subset [0,\infty)$ が存在して C^∞ 位相で $\gamma_j \to \hat{\gamma}$ となる. ただし, $\gamma_j(x) := \gamma(x, t_j)$ とした. 同様にして v_j も C^∞ 位相で $v_j \to \hat{v}$ となり, さらに $\lambda_j \to \hat{\lambda}$ であることも従う. γ, v, λ は (EQ) をみたすので, 補題 5.4 から $\hat{\gamma}, \hat{v}, \hat{\lambda}$ は次の方程式をみたす:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^4 \hat{\gamma}}{\partial x^4} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(\hat{v} - 2\left|\dfrac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial x^2}\right|^2\right)\dfrac{\partial \hat{\gamma}}{\partial x}\right) + \hat{\lambda}\hat{\boldsymbol{n}} = 0, \\ -\dfrac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \left|\dfrac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial x^2}\right|^2 \hat{v} = 2\left|\dfrac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial x^2}\right|^4 - \left|\dfrac{\partial^3 \hat{\gamma}}{\partial x^3}\right|^2 - \hat{\lambda}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \dfrac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial x^2}, \\ \displaystyle\int_0^L \left\{\left(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \dfrac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial x^2}\right)\hat{v} - \left(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \dfrac{\partial^2 \hat{\gamma}}{\partial x^2}\right)^3 + \hat{\lambda}\right\} dx = 0. \end{cases}$$

従って $\hat{\gamma}, \hat{v}, \hat{\lambda}$ は (EE) の解である．次に γ が $\hat{\gamma}$ に C^∞ 位相で収束することを示す．$\|\gamma\|_{H^{n+4}} \leq C$ であることから，

$$\|\gamma - \hat{\gamma}\|_{C^n} \leq C \sum_{k=0}^{n+1} \|\gamma - \hat{\gamma}\|_{L^2}^{1/(2k+2)}$$

が従う．よって，命題 5.1 を次のようにいいかえることができる：

"$T > 0$ と $r > 0$ が存在して $\|\gamma - \hat{\gamma}\|_{L^2} \leq r$ をみたす任意の $\gamma(x,t)$ と $t \geq T$ に対して

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{L^2} \geq |E(\gamma) - E(\hat{\gamma})|^{1-\theta}$$

が成り立つ．"

ここで $U_r := \{\gamma(x,t) \mid \|\gamma - \hat{\gamma}\|_{L^2} \leq r\}$ とおく．結論を得るためには"任意の $r > 0$ に対して $T > 0$ が存在し $t \geq T$ である任意の t に対して $\gamma(\cdot, t) \in U_r$ が成り立つ" ということを示せばよい．これを否定すると，ある $\{t_j\}_{j=1}^{j=\infty}$ が存在して $\gamma(\cdot, t_j) \notin U_r$ となる．前半の議論より，$\gamma(\cdot, t_1) \in U_{r/2}$ となる $t_1 > T$ の存在が従う．一方，$\|\gamma\|_{L^2}$ の連続性から任意の $t \in [t_1, t_2)$ に対して $\gamma(\cdot, t) \in U_r$ となり，$\gamma(\cdot, t_2) \notin U_r$ であるような $t_2 > t_1 > T$ が存在することがわかる．このとき，

$$\frac{r}{2} \leq \|\gamma(\cdot, t_2) - \gamma(\cdot, t_1)\|_{L^2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{L^2} dt \tag{5.6}$$

が成り立つ．任意の $t \in [t_1, t_2)$ に対して，命題 5.1 より

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(\gamma) = -\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{L^2}^2 \leq -\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{L^2} |E(\gamma) - E(\hat{\gamma})|^{1-\theta}.$$

さらに，$E(\gamma) - E(\hat{\gamma}) \geq 0$ であるから，

$$\frac{1}{2\theta} \frac{d}{dt} (E(\gamma) - E(\hat{\gamma}))^\theta = \frac{1}{2\theta} \theta (E(\gamma) - E(\hat{\gamma}))^{\theta-1} \frac{d}{dt} E(\gamma) \leq -\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{L^2} \tag{5.7}$$

を得る．ここで (5.7) の両辺を t_1 から t_2 まで積分すると，

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|_{L^2} dt \leq \frac{1}{2\theta} \left[(E(\gamma) - E(\hat{\gamma}))^\theta \right]_{t_2}^{t_1} \leq \frac{1}{2\theta} (E(\gamma(\cdot, t_1)) - E(\hat{\gamma}))^\theta \tag{5.8}$$

となるので，(5.6) と (5.8) をあわせれば

$$\frac{r}{2} \leq \frac{1}{2\theta} (E(\gamma(\cdot, t_1)) - E(\hat{\gamma}))^\theta$$

が従う．しかし，補題 5.4 と命題 5.1 より $T > 0$ を十分大きくとれば，

$$\frac{1}{2\theta} (E(\gamma(\cdot, t_1)) - E(\hat{\gamma}))^\theta < \frac{r}{2}$$

とできる．これより結論が得られる． □

参考文献

[1] N. Koiso, *On the motion of a curve towards elastica*, in Actes da la Table Ronde de Géometrie Différentielle (Luminy 1992), Sémin Congr. 1, Soc. Math. France, Paris, 1996, 403-436.

[2] J. Langer and D.A. Singer, Knotted elastic curve in $\mathbb{R}^3$, J. London Math. Soc. 30 (1984), 512-520.

[3] W. Matsumoto, M. Murai, S. Yotsutani, *By which kind of sound, can one hear the shape of drum?*, RIMS Kokyuroku 1315 (2003), 156-175.

[4] S. Okabe, *The motion of an elastic closed curve with constant enclosed area*, preprint, (2004).

[5] L. Simon, *Asymptotics for a class of non-linear evolution equations, with applications to geometric problems*, Ann. Math. 118 (1983), 525-571.

[6] K. Watanabe, *Plane domains which are spectrally determined*, Annals of Global Analysis and Geometry 18 (2000), 447-475.

[7] K. Watanabe, *Plane domains which are spectrally determined II*, J. Inequal. Appl. (2000), 1-22.